Introdução à Análise Complexa

João Palhoto Matos

10 de Setembro de 2002

Índice

Capítulo 1

Introdução

Este texto é uma introdução rápida à Análise Complexa para quem conhece Análise Real ao nível dos dois primeiros anos de uma licenciatura do IST. Procurei evitar explicitamente demonstração de resultados que são totalmente análogos aos de Análise Real, como o teorema sobre raio de convergência de séries de potências, e tenta-se dar ênfase aos resultados que são inesperados do ponto de vista de quem conhece Análise Real, como diferenciabilidade implicar analiticidade. O texto está em elaboração e está sujeito a todo o tipo de mutações súbitas, erros, etc.

Confesso que as minhas introduções favoritas à Análise Complexa são [4] e o último capítulo de [2]. O primeiro é obviamente sofisticada demais para o nível a que estas notas estão escritas. Um outro texto clássico é [1].

Resumidamente alguns das características desta nota são:

- É curta.
- Supõe que o leitor não sofre de amnésia relativamente a Análise Real elementar.
- Limites envolvendo integrais são tratados usando o teorema da convergência dominada ou estimativas elementares.
- Não contém “ramos de funções”.
- Todos os logaritmos e raízes quadradas têm os mesmos direitos.
- Contém uma demonstração do teorema de Cauchy-Goursat.
- Demonstra o que é difícil e não o que é trivial.
- Holomorfia implicar analiticidade é um teorema.

A menos de correcção de gralhas o texto ficou essencialmente completo em 18 de Junho de 2000. Versões posteriores só estarão disponíveis como parte de um texto que estou elaborar juntamente com o Diogo Gomes e o João Paulo Santos.

Para comunicar “gralhas” matemáticas, linguísticas ou tipográficas ao autor use email para jmatos@math.ist.utl.pt. Se o texto estiver ainda em fase preparatória e de facto tiver encontrado um erro a correcção será incorporada na versão seguinte disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/AMIV/iac.pdf`. Caso o texto seja publicado em papel a errata estará disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/AMIV/errata-iac.pdf`.

IST, 10 de Setembro de 2002,

João Palhoto Matos

Capítulo 2

Análise Complexa

A *Análise Complexa* tem como objecto de estudo as funções complexas de variável complexa que satisfazem no interior do seu domínio uma definição de diferenciabilidade. Em que medida é que isto difere da Análise Real de funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$? A diferença vai-se dever às aplicações lineares de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ (multiplicação por um complexo fixo) corresponderem da maneira natural a aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ muito específicas: aquelas que podem ser representadas por matrizes reais 2×2 da forma $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right]$ com $a, b \in \mathbb{R}$. É isto que vai provocar uma extraordinária diferença qualitativa entre os dois assuntos. De resto as noções topológicas (limite, aberto, continuidade) em $\mathbb{C}$ são exactamente as mesmas de $\mathbb{R}^2$. De certa forma falarmos de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{C}$ não é falarmos de conjuntos distintos mas de estruturas algébricas distintas sobre o mesmo conjunto de pares ordenados de números reais.

2.1 Estrutura algébrica

Para construir $\mathbb{C}$, o corpo dos complexos, começamos por considerar $\mathbb{R}^2$ com a estrutura usual de espaço vectorial real à qual juntamos um *produto* através de

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

O conceito de potência inteira positiva de um complexo introduz-se da maneira habitual. Facilmente se verifica que restringindo a soma e o produto a $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ obtemos uma "cópia" de $\mathbb{R}$ com a soma e o produto usuais. Para $a \in \mathbb{R}$ convencionamos escrever a em vez de $(a, 0)$ e identificamos este conjunto com $\mathbb{R}$ daqui por diante. Além disso convencionamos designar por i o complexo $(0, 1)$ que satisfaz $i^2 = -1$. Isto permite introduzir a notação $a + bi$ em vez de (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$, para os elementos de $\mathbb{C}$. Designaremos a por parte real de $a + bi$ e b por coeficiente da parte imaginária com notação $a = \mathrm{Re}(a + bi)$, $b = \mathrm{Im}(a + bi)$.

O elemento neutro para o produto em $\mathbb{C}$ é 1 e o 0 é o elemento absorvente, isto é, $1z = z1 = z$, $0z = z0 = 0$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. Além disso, dado $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, existe um inverso único $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = wz = 1$. Um cálculo rápido mostra que se $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ então $w = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Usamos a notação z^{-1} para o inverso de um complexo não nulo e definimos potências de expoente inteiro qualquer da forma habitual. Notamos que podíamos ter escrito $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ em que $\overline{z}$ é o *conjugado* de z definido por $\overline{a + bi} = a - bi$ e $|z|$ é o módulo de z definido por $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

A interpretação geométrica de $\mathbb{C}$ e das operações nele introduzidas, nomeadamente o produto e os conceitos de módulo e conjugado revelar-se-ão extremamente importantes. Assim a conjugação corresponde a uma reflexão relativamente ao eixo real, o módulo correponde à norma euclideana em $\mathbb{R}^2$ (a distância à origem), o produto por um complexo de módulo 1 corresponde a uma rotação, o produto por real positivo a uma homotetia, o produto por -1 a uma simetria em relação a 0, um produto por i a uma rotação de $\pi/2$,... Para reinterpretar o produto complexo em termos de

aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ convém comparar:

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$$
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{bmatrix}$$

isto é o produto por um complexo $a+bi$ corresponde a uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ representada por uma matriz $\left[\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$.

Exercício 2.1.1 *Mostre que o produto por um complexo pode ser interpretado como uma homotetia seguida de uma rotação. Exprima a homotetia e a rotação tanto como produtos em $\mathbb{C}$ como aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.*

2.2 Diferenciabilidade

Seja $z \in \mathbb{C}$ com $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$. A aplicação $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$ e a sua inversa fornecem o método canónico de identificar $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$ e vice-versa. Um subconjunto de $\mathbb{C}$ dir-se-á *aberto*, *fechado*, *conexo*, *compacto*,..., se tal for verdade para o conjunto correspondente de $\mathbb{R}^2$. Algo análogo passa-se para aplicações contínuas com domínio em $\mathbb{C}$ e com valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a noção de convergência de uma sucessão, a noção de limite de uma sucessão ou função, soma de uma série, etc. À noção de norma euclidiana de um vector de $\mathbb{R}^2$ corresponde como já vimos a de módulo de um complexo, isto é, $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$. Uma aplicação contínua de um intervalo de $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{C}$ designar-se-á ainda por caminho. A primeira noção que, de facto, escapa a esta analogia é, como já se disse,

Definição 2.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto, $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Diz-se que f é diferenciável em z_0 se existir*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{2.1}$$

De forma análoga ao que acontece com funções reais de variável real aquele limite quando existe é único, designamo-lo por derivada de f em z_0 e abreviamo-lo por $f'(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$ ou $Df(z_0)$.

Problema 2.2.1 *Verifique que diferenciabilidade num ponto implica continuidade.*

Problema 2.2.2 *Mostre que as seguintes condições são equivalentes a (2.1):*

1. *Existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = f(z_0) + w(z - z_0) + o(|z - z_0|)$ em que $\lim_{z\to z_0} \frac{o(|z-z_0|)}{|z-z_0|} = 0$.*

2. *Existe uma aplicação linear $\Lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = f(z_0) + \Lambda(z - z_0) + o(|z - z_0|)$ em que $\lim_{z\to z_0} \frac{o(|z-z_0|)}{|z-z_0|} = 0$.*

3. *Escrevendo $z_0 = x_0 + iy_0$ com $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ com u, v com valores reais a aplicação $\psi = (u,v)$ é diferenciável em (x_0, y_0) com derivada representada por uma matriz jacobiana $J_\psi(x_0,y_0) = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right]$ com $a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$, $b = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.*

As condições obtidas no problema anterior

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{2.2}$$

são conhecidas por condições de Cauchy-Riemann e serão fundamentais em tudo o que se segue.

A diferenciabilidade num ponto não é uma propriedade que por si só seja particularmente interessante. O nosso objectivo central são as funções diferenciáveis em abertos que dada a sua importância vão merecer uma designação própria.

Definição 2.2.2 *Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ com Ω aberto diz-se* holomorfa *se fôr diferenciável em Ω.*

Exercício 2.2.1 *Define-se a exponencial complexa via $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Verifique que a exponencial é holomorfa em $\mathbb{C}$ e que $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$. Resolva a equação $e^z = 1$.*

Exercício 2.2.2 *Seja $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Define-se para $x > 0$*

$$f(z) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

1. *Use as condições de* Cauchy-Riemann *para mostrar que f é diferenciável.*
2. *Mostre que $\overline{f}$, a função conjugada de f, não é diferenciável.*
3. *Exprime $f'(z)$ em termos de z.*
4. *Mostre que $e^{f(z)} = z$ para $\operatorname{Re}(z) > 0$.*
5. *Determine o contradomínio de f.*

Embora extremamente importantes as condições de Cauchy-Riemann nem sempre são o processo mais expedito para garantir que uma função é holomorfa ou calcular a sua derivada.

Exercício 2.2.3 *Verifique que as regras de derivação usuais*[1] *valem para funções holomorfas.*

Exercício 2.2.4 *Verifique que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um aberto e as funções $g : I \to \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ são diferenciáveis então $f \circ g$ é diferenciável em I com*

$$\frac{d}{dt}\left(f(g(t))\right) = f'(g(t))g'(t) \qquad \text{para todo } t \in I.$$

Definição 2.2.3 *Uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ diz-se* inteira.

Exercício 2.2.5 *Verifique que as potências inteiras são funções holomorfas, as constantes são holomorfas com derivada nula e $\frac{d}{dz}(z^k) = kz^{k-1}$ para $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.*

Os polinómios e a exponencial são funções inteiras. Outros exemplos de funções inteiras importantes são o seno (sen), coseno (cos), seno hiperbólico (sh) e coseno hiperbólico (ch) complexos definidos a partir da exponencial via

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Exercício 2.2.6 *Verifique que as restrições ao eixo real das funções que acabámos de definir coincidem com as funções reais de variável real do mesmo nome, que estas funções são inteiras e satisfazem as regras de derivação usuais (e.g. $\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z$).*

Exercício 2.2.7 *Verifique que se f é uma função holomorfa com derivada que não se anula então $\overline{f}$ não é holomorfa.*

Exercício 2.2.8 *Verifique que as linhas de nível da parte real de uma função holomorfa são ortogonais às linhas de nível do coeficiente da parte imaginária. Esboce tais linhas de nível para $z \mapsto z^2$ e $z \mapsto e^z$.*

[1] Da soma, produto, quociente, composição,...

Além de estabelecerem a ortogonalidade entre as linhas de nível da parte real e do coeficiente da parte imaginária de uma função holomorfa as condições de Cauchy-Riemann estabelecem também restrições muito fortes ao crescimento daquelas funções. É o que se ilustra no exercício seguinte.

Exercício 2.2.9 *Uma função* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é da forma*

$$f(x+iy) = \varphi(x^2 - y^2) + i\psi(xy), \qquad \textit{com } x, y \in \mathbb{R},$$

em que φ *e* ψ *são funções reais de variável real diferenciáveis. Mostre que se* f *é holomorfa* φ *e* ψ *devem ter derivadas constantes e aproveite para determinar todos os possíveis* f.

2.3 Funções definidas por séries de potências

Um tema recorrente da Análise Complexa será a interrelação entre diversos tipos de representações para funções holomorfas. Alguns desses tipos de representação envolvem séries de potências. Os conceitos de série, série de potências, sucessão de somas parciais, são em tudo análogos ao que se conhece de Análise Real (ver por exemplo [3]). O mesmo se passa com as definições e resultados seguintes.

Definição 2.3.1 *Uma série* $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$ *diz-se* absolutamente convergente *se a série* $\sum_{k=1}^{+\infty} |z_k|$ *fôr convergente.*

Proposição 2.3.1
Uma série absolutamente convergente é convergente.

Proposição 2.3.2
Dada uma série de potências $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ *existe* $R \in [0, +\infty]$ *tal que para* $|z - z_0| < R$ *a série é absolutamente convergente e divergente para* $|z - z_0| > R$*. Se* $R > 0$ *a função* $B_R(z_0) \ni z \mapsto f(z) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ *é holomorfa com derivada* $f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}$ *sendo esta série absolutamente para* $|z - z_0| < R$*. Além disso a função definida em* $B_R(z_0)$ *por* $z \mapsto G(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ *é holomorfa verificando* $G'(z) = f(z)$*.*

R na proposição anterior é conhecido por *raio de convergência* da série de potências. Pode ser calculado, tal como no caso real, via $R = 1/\overline{\lim}\,|a_k|^{1/k}$ ou, quando existir $\lim_{k\to+\infty} |a_k/a_{k+1}|$, o último limite fornece um processo alternativo de cálculo do raio de convergência. As habituais ressalvas sobre convergência para $|z - z_0| = R$ devem ser mencionadas: a série poderá divergir ou convergir sobre cada um dos pontos desta circunferência. Para estudar tais casos é muito útil a versão complexa do *critério de Dirichlet.*

Proposição 2.3.3
Seja $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de termos reais positivos decrescente e com limite* 0*. Seja* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão complexa tal que existe* $M > 0$ *tal que* $|\sum_{j=1}^{k} b_j| < M$ *para todo o* $k \in \mathbb{N}$*. Então a série* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ *é convergente.*

Exercício 2.3.1 *Determine para que valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a sucessão* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *definida por* $z_k = \sum_{j=1}^{k} e^{ij\alpha}$ *é*

1. *Ilimitada.*

2. *Limitada.*

Exercício 2.3.2 *Verifique que a série* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} z^k$ *tem raio de convergência* 1 *e determine para que valores de* z *com* $|z| = 1$ *é que a série converge.*

Exercício 2.3.3 *Define-se* $E(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$. *Verifique que* E *está definida para todo o* $z \in \mathbb{C}$. *Verifique que* E *satisfaz* $E(z+w) = E(z)E(w)$ *para todos os* $z, w \in \mathbb{C}$ *e use tal propriedade com* $z = a$, $w = bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, *para mostrar que* $E(z) = e^z$.

Exercício 2.3.4 *Verifique que os análogos dos desenvolvimentos em série do* sen, cos, sh *e* ch *são válidos em* $\mathbb{C}$.

2.4 Integração

A integração ao longo de caminhos fechados em $\mathbb{C}$ fornece um poderosíssimo método de análise das funções holomorfas. Em geral podemos definir um integral de uma função ao longo de um caminho como segue:

Definição 2.4.1 *Seja* I *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e* $z : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *uma função cuja derivada existe em quase todo o* I. *Seja* $L = z(I)$ *e considere-se* $f : L \to \mathbb{C}$. *Definimos o integral de* f *ao longo do caminho definido*[2] *por* z *como sendo*

$$\int_L f(z)\, dz = \int_I f(z(t))z'(t)\, dt$$

sempre que o integral do segundo membro existir[3].

Esta definição é extremamente geral em relação ao que vamos de facto considerar na maioria das situações com interesse em que f será uma função holomorfa definida num aberto contendo L e z será seccionalmente C^1. Esta definição de integral possui muitas propriedades análogas ao de integral de linha no plano. Por exemplo, se um caminho for substituído por outro descrevendo a mesma linha obtido por uma mudança de variáveis com derivada positiva, o integral continua com o mesmo valor e com valor simétrico se a derivada da mudança de variáveis for negativa. Podemos concatenar caminhos e adicionar integrais de maneira análoga, etc. Outros exemplos de propriedades análogas são enunciados no exercício e no lema seguintes.

Exercício 2.4.1 *Mostre que se uma linha simples* L *for rectificável com comprimento* Λ *e* $|f| \le M$ *sobre* L *então*

$$\left| \int_L f\, dz \right| \le M\Lambda. \tag{2.3}$$

Lema 2.4.1 (Teorema Fundamental do Cálculo)
Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ *um aberto e* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *um função contínua tal que existe* $G : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa tal que* $G' = f$. *Seja* $z : [a, b] \to \Omega$ *um caminho seccionalmente* C^1 *com* $L = z([a, b])$. *Então*

$$\int_L f(z)\, dz = G(z(b)) - G(z(a)).$$

Ideia da demonstração.

$$\int_L f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(G(z(t)))\, dt = G(z(b)) - G(z(a)).$$

■

[2] Nesta definição e em situações semelhantes abusamos a notação usando o mesmo símbolo para a variável independente da função integranda e para o caminho.

[3] Recorda-se que o integral de uma função complexa definida num subconjunto de $\mathbb{R}$ é definido integrando parte real e parte imaginária da maneira natural.

Note-se que nas mesmas condições o integral ao longo de um caminho fechado em Ω será 0. Isto incluirá todos os integrais $\oint z^k\, dz$ e portanto todas as funções polinomiais. Além disso

Exemplo 2.4.1 *Seja z um caminho fechado seccionalmente C^1 em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definindo uma linha C. Então, se $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$,*

$$\oint_C \frac{1}{z^k}\, dz = 0.$$

O exemplo anterior não se pode estender ao caso $k = 1$ pois obtemos, com C a circunferência de raio 1 centrada em 0 percorrida uma vez no sentido directo, definida por $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}\, dt = 2\pi i.$$

Note-se que tal prova que é impossível definir uma primitiva holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ para $1/z$.

O exemplo anterior estende-se facilmente a $\oint_C \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i$ em que C é uma circunferência parametrizada por $z(t) = a + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Notavelmente podemos ainda estabelecer que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{1}{z-a}\, dz \in \mathbb{Z} \tag{2.4}$$

para uma qualquer linha fechada L seccionalmente C^1 com $a \notin L$. A expressão (2.4), designada por *número de rotação*, servir-nos-á mais à frente para contar o "número de voltas" em torno de um ponto dando o sinal a informação sobre o "sentido". Note que no enunciado não há nenhuma suposição sobre a linha ser simples.

Proposição 2.4.2 (Número de rotação)
Seja $a \in \mathbb{C}$ e L uma linha fechada seccionalmente C^1 em $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. Então

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{1}{z-a}\, dz \in \mathbb{Z}.$$

Ideia da demonstração. Podemos supor que L é parametrizada por $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Seja $a \in \mathbb{C}\setminus L$. Definimos

$$N(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{1}{z-a}\, dz.$$

O nosso objectivo é provar que N tem contradomínio em $\mathbb{Z}$. Notando que a exponencial complexa toma o valor 1 se e só se o seu argumento é um múltiplo de $2\pi i$ isto é equivalente a mostrar que

$$\exp\left(\oint_L \frac{1}{z-a}\, dz\right) = 1.$$

ou que, se definirmos $\varphi(t) = \exp\left(\int_\alpha^t \frac{z'(s)}{z(s)-a}\, ds\right)$ com $t \in [\alpha, \beta]$, temos

$$\varphi(\beta) = 1. \tag{2.5}$$

Para justificar (2.5) começamos por notar que obviamente $\varphi(\alpha) = 1$, φ é contínua e, com a possível excepção de um número finito de pontos onde z' não está definida,

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{z'(t)}{z(t)-a}.$$

Diferenciando o quociente $\frac{\varphi(t)}{z(t)-a}$ verifica-se que a igualdade anterior implica que $\frac{\varphi(t)}{z(t)-a}$ tem derivada nula excepto num número finito de pontos. Como também é contínua terá que ser constante. Como $\varphi(\alpha) = 1$ obtivemos

$$\varphi(t) = \frac{z(t)-a}{z(\alpha)-a}, \qquad \text{para } t \in [\alpha, \beta].$$

Como $z(t)$ define um caminho fechado, $z(\beta) = z(\alpha)$ e portanto $\varphi(\beta) = \varphi(\alpha) = 1$. ∎

Apesar daquilo que foi dito sobre a primitivação de $1/z$ podemos obter uma primitiva em certos[4] subconjuntos de $\mathbb{C}$.

Exercício 2.4.2 *Determine uma primitiva de $1/z$ em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \neq 0$ ou $\mathrm{Re}(z) > 0\}$ e tal que se a designar por $\log z$ temos $\mathrm{Im}(\log z) \in\,]-\pi, \pi[$. Verifique que esta função é uma inversa da restrição da exponencial a $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \in\,]-\pi, \pi[\}$.*

O resultado central sobre integração é o teorema de Cauchy que será demonstrado à custa de vários lemas que são casos particulares do teorema.

Lema 2.4.3 (Teorema de Cauchy num triângulo)
Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto, $T \subset \Omega$ um triângulo fechado com fronteira ∂T descrita por um caminho $z(t)$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então

$$\oint_{\partial T} f\, dz = 0.$$

Ideia da demonstração. Suponha que o integral não é 0 e designemo-lo por I. A demonstração baseia-se em localizar um ponto z_0 no triângulo T em torno do qual existem caminhos (fronteiras de triângulos obtidos por um esquema tipo *princípio de encaixe*) em torno de z_0, com diâmetro a tender para 0, relativamente aos quais o integral é tão grande quanto possível e por outro lado usar a diferenciabilidade em z_0 para mostrar que I é arbitrariamente pequeno.

Considerem-se então os pontos médios dos lados de T (ver figura 2.1) que unidos por segmentos de recta dividem T em 4 triângulos com interiores disjuntos dois a dois. Para pelo menos um desses triângulos, que passamos a designar por T_1, deveremos ter

$$\left|\oint_{\partial T_1} f\, dz\right| \geq |I|/4$$

visto que a soma dos integrais ao longo das fronteiras dos quatro triângulos tomados no mesmo sentido devem igualar o integral sobre ∂T. Tal deve-se aos integrais sobre lados comuns a dois triângulos serem tomados em sentidos opostos e portanto cancelarem-se mutuamente. Note que a soma dos comprimentos dos lados de T_1 é metade da soma dos comprimentos dos lados de T.

Aplicando a T_1 o mesmo procedimento que a T pode obter-se um triângulo T_2 contido em T_1 com soma de comprimentos de lados igual 1/4 da de T e com

$$\left|\oint_{\partial T_2} f\, dz\right| \geq |I|/16.$$

Procedendo indutivamente obtém-se uma sucessão de triângulos fechados $T \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_k \supset \dots$ tais que a soma dos comprimentos dos lados de T_k é 2^{-k} vezes a soma dos comprimentos dos lados de T, o seu diâmetro tende para 0 quando $k \to \infty$ e

$$\left|\oint_{\partial T_k} f\, dz\right| \geq |I|/4^k. \tag{2.6}$$

Existe um e um só ponto na intersecção de todos estes triângulos que designamos por z_0.

Usando agora a diferenciabilidade de f em z_0, dado $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que para $|z - z_0| < r$

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon$$

ou de forma equivalente

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0|.$$

[4]Compare com a determinação de um potencial de um campo fechado em abertos de $\mathbb{R}^2$.
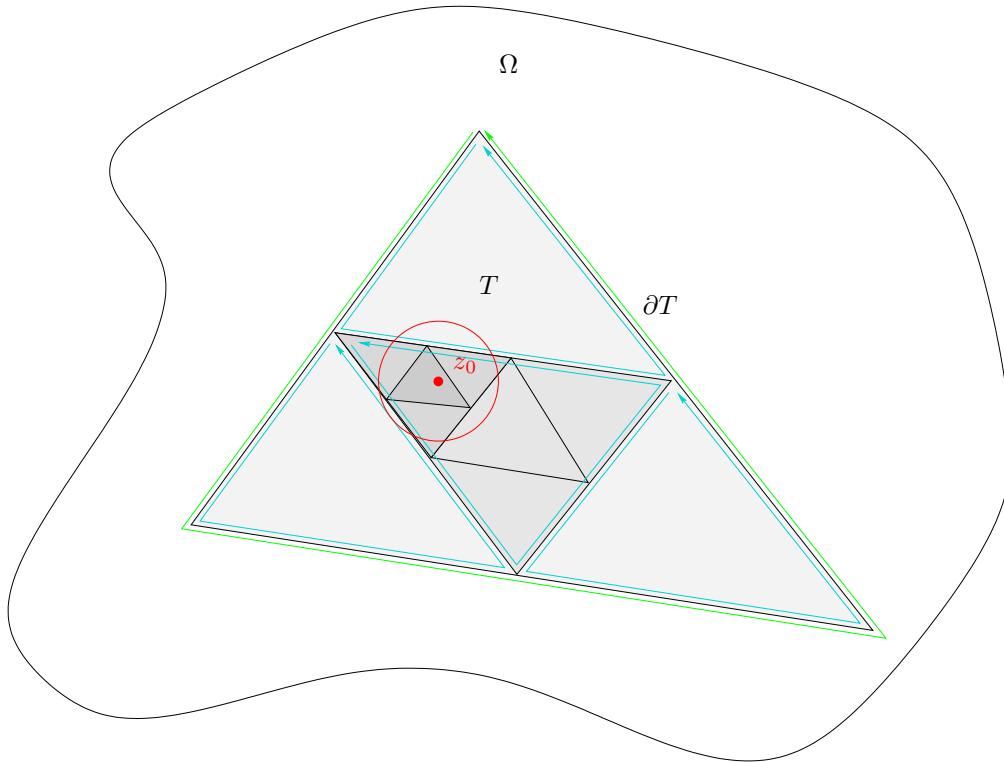
Figura 2.1: A demonstração do teorema de Cauchy.

Além disso existe k tal que $T_k \subset B_r(z_0)$ e, para $z \in T_k$, $|z - z_0| < \Lambda(\partial T_k) = 2^{-k}\Lambda(\partial T)$ em que Λ designa "comprimento de". Podemos assim estimar

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T_k} f(z)\, dz \right| &= \left| \int_{\partial T_k} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))\, dz \right| \\ &< \epsilon |z - z_0| \Lambda(\partial T_k) < \epsilon \Lambda(\partial T_k)^2 = \epsilon 4^{-k} \Lambda(\partial T)^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

em que se utilizou o facto de os integrais de polinómios ao longo de caminhos fechados serem 0 e a estimativa (2.3). Mas então combinando (2.6) e (2.7) obtemos

$$|I| \leq \epsilon \Lambda(\partial T)^2$$

o que mostra que só podemos ter $I = 0$. ■

Antes de prosseguir convém observar porque é que o análogo deste teorema para integrais de linha de funções diferenciáveis de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ não é verdadeiro. A razão é simplesmente o integral de linha de um campo *linear* de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ ao longo de um caminho fechado regular não ser necessariamente 0. Uma condição necessária e suficiente para isso acontecer é esse campo *linear* ser fechado ou seja definido por uma matriz $\left[\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$ ou, em linguagem de funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, verificar as condições de Cauchy-Riemann.

Lema 2.4.4 (Teorema de Cauchy (existência de primitiva) em conjuntos convexos) *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um convexo aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então existe $G : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa em Ω e tal que $G' = f$. (Consequentemente, de acordo com 2.4.1, obtemos $\oint_L f(z)\, dz = 0$ para uma qualquer linha fechada L seccionalmente C^1 em Ω.)*

Ideia da demonstração. Seja $w_0 \in \Omega$. Convencionamos que o segmento de recta unindo w a z é designado por $L(w,z)$. Constrói-se um candidato a primitiva considerando

$$G(z) = \int_{L(w_0,z)} f(z)\, dz.$$

Resta mostrar que G é diferenciável com $G' = f$. Para isso precisamos de estimar

$$\beta \equiv \left| \frac{G(z) - G(z_0)}{(z - z_0)} - f(z_0) \right|.$$

Considerando o triângulo com vértices w_0, z_0, z e usando o lema 2.4.3 verificamos que

$$G(z) - G(z_0) = \int_{L(z_0,z)} f(z)\, dz$$

o que permite

$$\beta = \left| \frac{\int_{L(z_0,z)} f(z) - f(z_0)\, dz}{z - z_0} \right| \le \max_{w \in L(z_0,z)} |f(w) - f(z_0)|.$$

A continuidade de f em z_0 permite obter a conclusão desejada. ■

Exercício 2.4.3 *Curiosamente os dois lemas anteriores são ainda válidos se substituirmos a hipótese de holomorfia de f em Ω pela hipótese de holomorfia em Ω excepto possivelmente num ponto em que exigimos continuidade de f. Demontre esta afirmação. Irá ser usada na demontração da fórmula integral de Cauchy*[5].

Lema 2.4.5 (Primeira versão da fórmula integral de Cauchy.)
Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto convexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e L uma linha fechada seccionalmente C^1 em Ω. Seja $z \in \Omega \setminus L$. Então

$$\int_L \frac{f(w)}{w - z}\, dw = f(z) \int_L \frac{1}{w - z}\, dw = f(z) 2\pi i N_L(z).$$

em que $N_L(z)$ designa o número de rotação de z relativamente a L.

Ideia da demonstração. Aplique o lema 2.4.4 com a formulação obtida no exercício 2.4.3 a $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{se } w \neq z, \\ f'(z), & \text{se } w = z. \end{cases}$$

■

A versão anterior da fórmula integral de Cauchy vai ser suficiente para obter rapidamente algumas propriedades notáveis das funções holomorfas do ponto de vista de regularidade. Para isso basta considerar o caso em que $L \equiv C(a,r)$, uma circunferência centrada em a percorrida uma vez no sentido directo. Precisaremos de calcular o número de rotação $N_L(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{w-z}\, dw$ neste caso particular. No caso de $z = a$ o cálculo directo conduz facilmente, como já vimos atrás, a $N_L(a) = 1$. No caso geral, notamos que o número de rotação é uma função contínua do seu argumento que só toma valores inteiros e que a região limitada pela circunferência é conexa. Logo $N_L(z) = N_L(a) = 1$ para todo o z no interior do círculo. Um argumento alternativo usando o teorema de Cauchy é descrito no exercício seguinte.

[5]...e em mais lado nenhum pois será uma consequência de resultados posteriores que tais funções são holomorfas em Ω.

Exercício 2.4.4 *Seja $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, e $C(a,r)$ a circunferência de raio r centrada em a e percorrida uma vez no sentido directo, isto é, $C(a,r)$ é definida pelo caminho $z(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Seja $z \in B(a,r)$. Seja $\epsilon < r - |z-a|$ e considere $C(z,\epsilon)$ com o significado óbvio e três segmentos de recta unindo $C(z,\epsilon)$ a $C(a,r)$ como sugerido na figura 4, por exemplo radiais relativamente a a nas direcções definidas por 1, $e^{2\pi i/3}$ e $e^{-2\pi i/3}$.*

1. *Verifique que $\oint_{C(z,\epsilon)} \frac{1}{w-z}\, dw = 2\pi i$.*

2. *Utilize o teorema de Cauchy e três linhas fechadas simples definidas pelas fronteiras de cada uma das regiões conexas em que ficou dividida a coroa entre os dois círculos para mostrar que $\oint_{C(a,r)} \frac{1}{w-z}\, dw = \oint_{C(z,\epsilon)} \frac{1}{w-z}\, dw = 2\pi i$.*
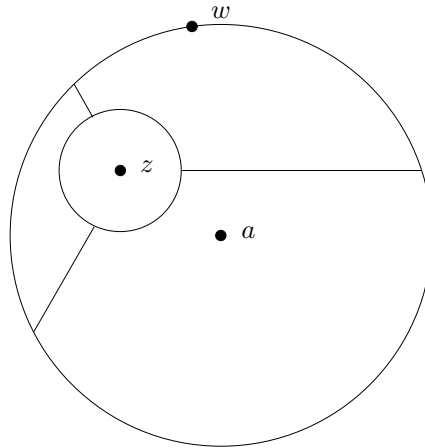
Figura 2.2: Esta figura acompanha o exercício 2.4.4.

Lema 2.4.6 (Segunda versão da fórmula integral de Cauchy)
Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto e considere-se $a \in \Omega$ tal que $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então, designando por $C(a,r)$ a circunferência de raio r centrada em a percorrida no sentido directo definida atrás,

$$\oint_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = 2\pi i f(z), \text{ para todo o } z \in B_r(a). \tag{2.8}$$

Além disso, f é analítica verificando

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dz \tag{2.9}$$

para todo o $k \in \mathbb{N}_0$ e

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} \oint_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dz\, (z-a)^k \tag{2.10}$$

para todo o $z \in B_r(a)$. Adicionalmente f é representável pela sua série de Taylor *relativa a a em $B_r(a)$, isto é,*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k,$$

para todo o $z \in B_r(a)$.

Ideia da demonstração. A igualdade (2.8) resulta de forma imediata dos resultados anteriores. O facto de se verificar permite usar resultados sobre derivação de integrais paramétricos tipo regra de Leibniz para obter (2.9) [6]. Finalmente para obter (2.10) usa-se a soma da série geométrica para estabelecer a identidade

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-a)-(w-a)} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^k, \tag{2.11}$$

válida se $|w-a| < |z-a|$, substitui-se em (2.4.6) e justifica-se a troca da série com o integral usando, por exemplo, a versão do teorema da convergência dominada para séries. ■

Uma propriedade notável da série de Taylor de uma função holomorfa incluida no enunciado do resultado anterior, e que pode passar despercebida em primeira leitura, é o raio de convergência da série de Taylor centrada num ponto do domínio ser a distância ao conjunto das singularidades não removíveis da função[7]. Isto contrasta com o que é conhecido para funções reais de variável real.

Exercício 2.4.5 *Considere $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Obtenha o raio de convergência da série de Taylor desta função em 0 usando o lema 2.4.6.*

As versões do teorema de Cauchy que obtivemos até agora, que têm um carácter algo restritivo no que diz respeito à topologia do domínio de holomorfia ou da linha fechada que consideramos, implicam regularidade adicional das funções holomorfas. Tal permite obter versões mais gerais do teorema de Cauchy em que levantamos tanto quanto possível essas restrições topológicas à custa de versões já conhecidas do teorema de Green em Análise Real.

Teorema 2.4.7 (Teorema de Cauchy)
Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e L uma linha fechada seccionalmente C^1 em Ω. Então

$$\oint_L f(z)\, dz = 0.$$

Exercício 2.4.6 *Demostre a versão anterior do teorema de Cauchy usando o teorema de Green e o facto das funções holomorfas serem analíticas.*

O facto da derivada de uma função holomorfa ser holomorfa, juntamente com a demonstração do lema 2.4.3 só depender do integral ao longo de fronteiras de triângulos ser 0 e da continuidade de f, permite estabelecer que uma tal função tem uma primitiva holomorfa e portanto que ela própria é holomorfa. Isto constitui um recíproco do teorema de Cauchy que se pode enunciar formalmente como segue.

Teorema 2.4.8 (Morera)
Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua satisfazendo $\oint_{\partial T} f(z)\, dz = 0$ para todo o triângulo T tal que $\overline{T} \subset \Omega$. Então f é holomorfa em Ω.

2.5 Zeros e singularidades

Ao estabelecermos que uma função holomorfa é analítica, ficamos com um instrumento precioso para estudar propriedades destas funções. Em particular no que diz respeito a *zeros* e *singularidades isoladas*. Começamos por definir precisamente *singularidade* e *singularidade removível*.

[6] Alternativamente (2.9) pode obter-se de (2.10).

[7] Um ponto a no fecho do domínio de uma função complexa de variável complexa diz-se uma *singularidade não removível* da função se não existir uma outra função que na intersecção dos domínios de ambas só difere da primeira em a e é holomorfa numa vizinhança de a.

Definição 2.5.1 *Dizemos que uma função holomorfa tem uma singularidade num ponto a do fecho do seu domínio se não existir uma função holomorfa numa vizinhança de a que na intersecção dos domínios das duas funções e de uma vizinhança de a coincida com a função original.*

A definição de singularidade permite algumas situações muito pouco interessantes. A definição seguinte encarrega-se de excluir esses casos.

Definição 2.5.2 *Dizemos que uma singularidade num ponto a do fecho do domínio duma função é* removível *se existir uma função holomorfa numa vizinhança de a que, na intersecção dos domínios das duas funções, só difere da função quando muito no ponto a.*

Uma classe importante de singularidades é a das singularidades isoladas.

Definição 2.5.3 *Dizemos que uma função holomorfa tem uma singularidade isolada num ponto a do fecho do seu domínio se for holomorfa em $B_r(a) \setminus \{a\}$ para algum $r > 0$ e ou não estiver definida em a ou não for diferenciável em a. A singularidade isolada é* removível *se for possível definir ou redefinir f em a de modo a que a nova função seja holomorfa numa vizinhança de a.*

Exercício 2.5.1 *Verifique que os conceitos de singularidade removível para singularidades isoladas referidos nas definições 2.5.2 e 2.5.3 coincidem.*

Exercício 2.5.2 *Verifique que $z \mapsto 1/\operatorname{sen}(1/z)$ define uma função com uma singularidade não isolada e não removível na origem.*

Exercício 2.5.3 *Verifique que $z \mapsto (e^z - 1)/z$ tem uma singularidade isolada removível na origem.*

Nesta secção estamos essencialmente interessados nas propriedades dos zeros e singularidades isoladas das funções holomorfas.

Proposição 2.5.1
Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então ou $f \equiv 0$ ou todos os zeros de f são pontos isolados.

Ideia da demonstração. Seja Z o conjunto dos zeros de f em Ω. Seja $z \in \partial Z \cap \Omega$. Existe $r > 0$ tal que f é representável por uma série de potências em $B_r(z)$, isto é $f(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (w-z)^k$ em $B_r(z)$. Se todos os coeficientes fossem nulos $z \in \operatorname{int} Z$, o que contradiria $z \in \partial Z$. Portanto existirá um $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $c_k \neq 0$. Designemo-lo por k_0. Então, em $B_r(z)$,

$$f(w) = (w-z)^{k_0} \sum_{k=k_0}^{+\infty} c_k (w-z)^{k-k_0}.$$

A continuidade da função $w \mapsto \sum_{k=k_0}^{+\infty} c_k (w-z)^{k-k_0}$ garante que z é um ponto isolado de Z. Assim o fecho do interior de Z tem que coincidir com o interior de Z. Como Ω é conexo isto só pode ocorrer se $\operatorname{int} Z = \emptyset$ (todos os zeros são pontos isolados) ou se $\operatorname{int} Z = \Omega$ ($f \equiv 0$). ∎

Corolário 2.5.2
Suponha-se que duas funções holomorfas num aberto conexo Ω coincidem num subconjunto de Ω que tem um ponto de acumulação em Ω. Então as duas funções são iguais em Ω.

Ideia da demonstração. Aplique-se o resultado anterior à diferença das duas funções. ∎

Quanto a singularidades isoladas começamos por notar que

Proposição 2.5.3
Suponha-se que uma função holomorfa é limitada numa vizinhança de uma singularidade isolada. Então a singularidade é removível.

Ideia da demonstração. Suponha-se f uma função holomorfa limitada numa vizinhança de uma singularidade removível z. Considere-se nessa vizinhança uma função g definida por

$$g(w) = \begin{cases} (w-z)^2 f(w), & \text{se } w \neq z, \\ 0, & \text{se } w = z. \end{cases}$$

O facto de f ser limitada permite utilizar a definição de derivada para mostrar que a derivada de g em z existe e é igual a 0. Logo g é holomorfa nessa vizinhança de z com uma representação por séries de potências

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (w-z)^k = \sum_{k=2}^{+\infty} c_k (w-z)^k$$

em que usámos na segunda igualdade $g(z) = g'(z) = 0$ para garantir $c_0 = c_1 = 0$. Mas então temos, para $w \neq z$,

$$f(w) = \frac{g(w)}{(w-z)^2} = \sum_{k=2}^{+\infty} c_k (w-z)^{k-2}$$

Logo podemos "remover" a singularidade de f definindo ou redefinindo esta função em z, via $f(z) = c_2$. ■

O resultado seguinte classifica os diversos tipos de singularidades isoladas. Nele usamos o termo *pólo* para designar uma singularidade isolada a de f que é uma singularidade removível para $(z-a)^m f(z)$ para algum $m \in \mathbb{N}$. O menor m nesta definição é a *ordem* do pólo.

Proposição 2.5.4 (Classificação de singularidades isoladas)
Suponha-se que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem uma singularidade isolada em $a \in \overline{\Omega}$. Então ocorre uma das seguintes situações:

i) a é uma singularidade removível;

ii) a é um pólo de f;

iii) para qualquer $r > 0$ e qualquer $w \in \mathbb{C}$ existe uma sucessão $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B_r(a) \setminus \{a\}$ tal que $f(z_k) \to w$ quando $k \to +\infty$.

Ideia da demonstração. Considere que não ocorre (iii). Então existem $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|f(z) - w| > \delta$ para todo o $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$. Define-se uma função $g : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ via

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}.$$

Temos $|g(z)| < 1/\delta$ pelo que, usando a proposição 2.5.3 a é uma singularidade removível de g. Prolonguemos g a a de maneira a ser holomorfa em $B_r(a)$ e continuemos a designar o prolongamento por g.

Se tivermos $g(a) \neq 0$ então a igualdade

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w, \qquad \text{para } z \in B_r(a) \setminus \{a\},$$

mostra que f tem uma singularidade removível em a e portanto verifica-se (i).

Se tivermos $g(a) = 0$ o desenvolvimento de Taylor de g em torno de a permite escrever $g(z) = (z-a)^m g_1(z)$ com g_1 holomorfa em $B_r(a)$ e $g_1(a) \neq 0$. Então

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g_1(z)} + w, \qquad \text{para } z \in B_r(a) \setminus \{a\},$$

e portanto a é um pólo de ordem m de f verificando-se (ii). ■

No caso (iii) dizemos que f tem uma *singularidade essencial* em a.

Exercício 2.5.4 *Classifique a singularidade em* 0 *das funções definidas por:*

1. $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$.
2. $\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$.
3. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$.
4. $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$.

2.6 O teorema dos resíduos

Definição 2.6.1 *Dizemos que uma função complexa de variável complexa é* meromorfa *num aberto* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *se existir* $A \subset \Omega$ *tal que* f *é holomorfa em* $\Omega \setminus A$*, cada ponto de* A *é um pólo de* f *e* A *não tem pontos de acumulação em* Ω*.*

Para cada $a \in A$ na definição anterior podemos escrever, com $k \in \mathbb{N}$ a ordem do pólo e para z numa vizinhança suficientemente pequena de a,

$$f(z) = \sum_{l=-k}^{+\infty} c_l (z-a)^l = \sum_{l=-k}^{-1} c_l (z-a)^l + \sum_{l=0}^{+\infty} c_l (z-a)^l.$$

Note-se que no último membro desta igualdade a segunda parcela é uma função holomorfa. À primeira parcela do último membro chamaremos *parte principal* de f em a. Ao coeficiente c_{-1} chamaremos *resíduo de* f *em* a, abreviadamente $\operatorname{Res}_f(a)$ ou $\operatorname{Res}(f; a)$. Convencionamos também dizer que o resíduo é 0 em singularidades removíveis e pontos onde a função é diferenciável.

A seguinte versão do *teorema dos resíduos* para funções meromorfas será suficiente para a maioria das aplicações que temos em mente. Mais à frente estendê-lo-emos a situações em que algumas das singularidades são essenciais e apresentaremos uma versão envolvendo a noção de número de rotação.

Teorema 2.6.1 (Teorema dos resíduos para funções meromorfas)
Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ *um aberto,* f *uma função meromorfa em* Ω*,* A *o conjunto dos pólos de* f*,* L *uma linha fechada seccionalmente* C^1 *em* $\Omega \setminus A$ *limitando uma região contida*[8] *em* Ω *e designemos por* A_L *o conjunto dos pólos de* f *na região limitada por* L*. Suponha-se que, para um pólo* $a \in A_L$ *de* f*,* L *é homotópica em* $\Omega \setminus \{a\}$ *a uma circunferência* C *descrita por* $z(t) = a + \rho e^{it}$ *em que* $\rho < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$*. Então*

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in A_L} \operatorname{Res}_f(a).$$

Ideia da demonstração. O número de pólos na região limitada por L tem que ser finito (porquê?). Designemos esses pólos por $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Seja P_k a parte principal de f em a_k. Então $f - \sum_1^p P_k$ é uma função holomorfa numa vizinhança da região limitada por L. Então o teorema de Cauchy garante que

$$\oint_L f(z)\,dz = \oint_L \sum_{k=1}^{p} P_k(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}_f(a_k).$$

Note que a hipótese garante que o caminho descrevendo L é homotópico a uma circunferência de raio suficientemente pequeno centrada em cada um dos a_ks percorrida uma vez no sentido directo (porquê?). ■

[8] Algo que será automaticamente satisfeito se Ω fôr simplesmente conexo.

Note que esta versão do teorema dos resíduos contém como casos particulares o teorema de Cauchy e a fórmula integral de Cauchy. A importância e popularidade do teorema dos resíduos como ferrramenta de Análise Complexa resulta em grande medida da conexão que estabelece entre a representação de funções via séries e integrais.

Para vermos algumas aplicações básicas do teorema dos resíduos convém fazermos algumas observações simples sobre como calcular resíduos. Por exemplo se a é um pólo de primeira ordem de uma função meromorfa f então

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\sum_{k=-1}^{+\infty} c_k(z-a)^k = \lim_{z\to a}\sum_{k=-1}^{+\infty} c_k(z-a)^{k+1} = c_{-1} = \mathrm{Res}_f(a).$$

De forma análoga se a é um pólo de segunda ordem

$$\lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left((z-a)^2 f(z)\right) = \mathrm{Res}_f(a).$$

Exercício 2.6.1 *Justifique a afirmação anterior e generalize para um pólo de ordem k para obter que nesse caso*

$$\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-a)^k f(z)\right) = \mathrm{Res}_f(a).$$

É importante notar que muitas vezes os cálculos sugeridos no exercício anterior podem ser bem mais trabalhosos do que recorrer a um desenvolvimento em série de Taylor bem conhecido.

Exemplo 2.6.1 *Considere $f(z) = \frac{1}{z^9(1-z^4)}$. Para determinar o resíduo de f na origem usamos o desenvolvimento da série geométrica para obter*

$$f(z) = \frac{1}{z^9}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{4k} = z^{-9} + z^{-5} + z^{-1} + \dots$$

pelo que a origem é um pólo de ordem 9 e o resíduo é 1.

2.7 Aplicações ao cálculo de certos integrais de funções reais de variável real

Entre as aplicações do teorema dos resíduos ou do teorema de Cauchy contam-se o cálculo de certos integrais ou valores principais de funções reais de variável real à custa do cálculo de integrais ao longo de certas famílias de caminhos fechados em $\mathbb{C}$ para os quais o teorema dos resíduos fornece facilmente um valor. Usualmente os caminhos fechados são decompostos em dois ou mais caminhos e o resultado obtém-se por passagem ao limite relativamente a um ou mais parâmetros. Há diversas variantes deste raciocínio. Ilustram-se dois casos relativamente típicos a seguir.

Exercício 2.7.1 *Seja $\rho > 0$. Considere as linhas fechadas que se obtêm percorrendo o segmento de recta unindo $-i\rho$ a $i\rho$ e uma das semi-circunferências centradas em 0 e raio ρ contidas em cada um dos semiplanos $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ e $\mathrm{Re}(z) \leq 0$. Designe essas linhas, percorridas "uma vez no sentido directo", por C_ρ^+ e C_ρ^-. Para $\rho > 1$ calcule*

$$\oint_{C_\rho^+}\frac{e^z}{(z^2-1)^2}\,dz \qquad e \qquad \oint_{C_\rho^-}\frac{e^z}{(z^2-1)^2}\,dz$$

e utilize um desses cálculos para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos y}{(y^2+1)^2}\,dy.$$

Exemplo 2.7.1 *Para certas funções não integráveis em $\mathbb{R}$ é no entanto interessante considerar o chamado valor principal*[9] *(v. p.) do integral de acordo com*

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \equiv \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} f(x)\, dx.$$

Note-se que se a função integrável no sentido de Lebesgue o valor principal coincide com o integral. No entanto há funções não integráveis para os quais existe valor principal. Um exemplo é a função $x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Vamos calcular

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

à custa de integrais

$$\int_{L_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

em que L_R é a linha esboçada na figura 2.3 obtida concatenando duas semi-circunferências e dois segmentos de recta[10]*. O teorema dos resíduos ou o teorema de Cauchy garantem que*
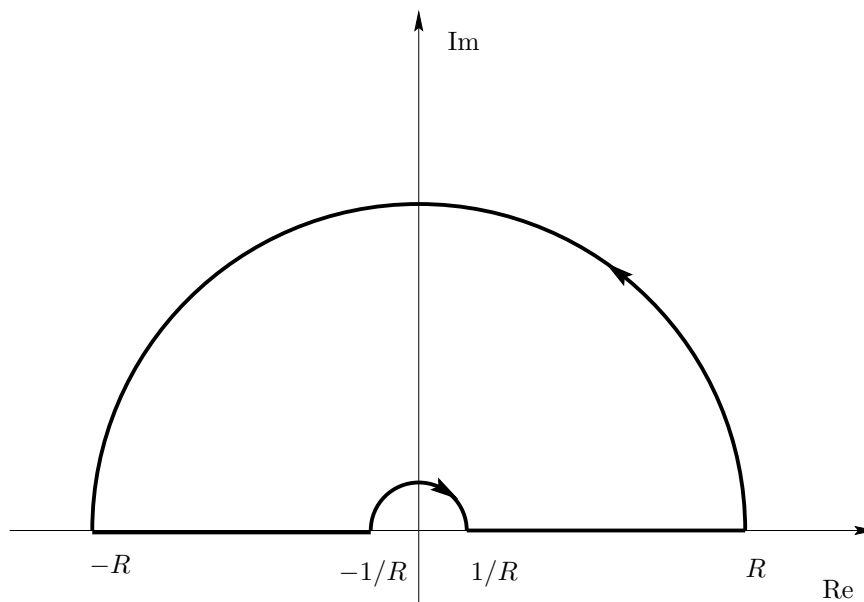
Figura 2.3: O contorno de integração no exemplo 2.7.1.

$$\int_{L_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0$$

pois a única singularidade da função integranda está na origem. Designemos a semi-circunferência de raio R por C_R percorrida no sentido indicado. Parametrizemo-la por $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Então

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} Rie^{it}\, dt = \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t + iR\cos t} i\, dt.$$

Como $|e^{-R\operatorname{sen} t+iR\cos t} i| = e^{-R\operatorname{sen} t}$ e a última expressão tende para 0 para $t \in]0, \pi[$, o teorema da convergência dominada garante que

$$\lim_{R\to\ +\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

[9] Este conceito ocorre naturalmente no estudo de certas transformações integrais, teoria das distribuições,...
[10] Este exemplo é relevante no estudo da convergência das séries de Fourier.

Procedendo de forma análoga com a semi-circunferência de raio $1/R$ *percorrida no sentido indicado obtemos*

$$\int_{C_{1/R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\int_0^{\pi} \frac{e^{ie^{it}/R}}{e^{it}/R} ie^{it}/R\,dt = -\int_0^{\pi} e^{-(\operatorname{sen} t + i\cos t)/R} i\,dt.$$

O teorema da convergência dominada pode mais uma vez ser invocado para estabelecer

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_{1/R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\pi i.$$

Finalmente notamos que restringindo $\frac{e^{iz}}{z}$ *ao eixo real obtemos* $\frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{x}$. *Assim, usando a decomposição de* L_R *em segmentos de recta e semi-circunferências*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{-1/R} \frac{\cos x + i\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_{1/R}^{R} \frac{\cos x + i\operatorname{sen} x}{x}\,dx =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{C_{1/R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \pi i.$$

Deixa-se ao cuidado do leitor verificar que o lado esquerdo desta igualdade iguala o valor principal multiplicado por i.

Exemplo 2.7.2 *Um outro exemplo de valor principal ocorre ao inverter a* transformada de Laplace[11]. *Pode-se mostrar que, sob certas condições, a inversão duma transformada de Laplace* F *pode ser calculada à custa de*

$$\frac{1}{2\pi}\,\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+iv)t} F(a+iv)\,dv \tag{2.12}$$

em que $a, t > 0$ *e* F *é uma função meromorfa com um número finito de pólos* $z_1, \ldots, z_k$, *todos contidos no semiplano definido por* $\operatorname{Re}(z) < a$. *Vamos mostrar que*[12], *sob certas condições relativas ao crescimento de* F,

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+iv)t} F(a+iv)\,dv = 2\pi \sum_{l=1}^{k} \operatorname{Res}(e^{\cdot t} F(\cdot); z_l). \tag{2.13}$$

Isto será feito à custa de considerar integrais $\int_{L_T \cup A_T} e^{zt} F(z)\,dz$ *em que* $L_T \cup A_T$ *designa a linha fechada formada por concatenação do segmento unindo* $a - iT$ *a* $a + iT$ *e pelo arco de circunferência de raio* $\sqrt{a^2 + T^2}$ *centrada em* 0 *percorrido no sentido directo. Uma tal linha está esboçada na figura 2.4.*

Temos, para T *suficientemente grande e usando o teorema dos resíduos,*

$$\int_{L_T \cup A_T} e^{zt} F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{l=1}^{k} \operatorname{Res}(e^{\cdot t} F(\cdot); z_l). \tag{2.14}$$

Além disso

$$\int_{L_T \cup A_T} e^{zt} F(z)\,dz = \int_{L_T} e^{zt} F(z)\,dz + \int_{A_T} e^{zt} F(z)\,dz. \tag{2.15}$$

Para o primeiro dos integrais do segundo membro vale

$$\int_{L_T} e^{zt} F(z)\,dz = \int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t} F(a+iv) i\,dv$$

[11] Não se pretende demonstrar aqui a fórmula de inversão da transformada de Laplace.
[12] Usamos a notação $G(\cdot)$ para designar uma função $z \mapsto G(z)$.
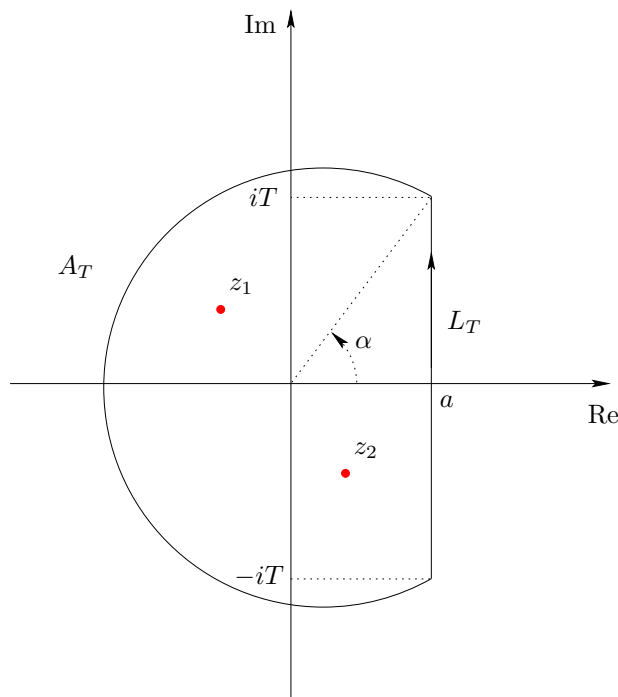
Figura 2.4: Invertendo a transformada de Laplace usando o teorema dos resíduos.

e, se existir o limite quando $T \to \infty$, este será igual a i vezes o primeiro membro de (2.13). Para o segundo integral em (2.15)

$$\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{\sqrt{a^2+T^2}e^{i\theta}} F(\sqrt{a^2+T^2}e^{i\theta})\sqrt{a^2+T^2}ie^{i\theta}\,d\theta. \tag{2.16}$$

em que $\alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+T^2}}\right)$. O nosso objectivo será atingido se mostrarmos que o integral (2.16) tende para 0 quando $T \to +\infty$. Isto só será realizável se de alguma forma controlarmos o crescimento de F para ∞. Uma hipótese razoável para muitas situações de interesse é supor que existem $M, R, c > 0$ tais que para $\mathrm{Re}(z) \le a$ e $|z| > R$ temos

$$|F(z)| \le \frac{M}{|z|^c}. \tag{2.17}$$

Adoptando então (2.17) começamos a estimar o integral (2.16). Como primeiro passo estimamos a função integranda

$$|e^{\sqrt{a^2+T^2}e^{i\theta}} F(\sqrt{a^2+T^2}e^{i\theta})\sqrt{a^2+T^2}ie^{i\theta}| \le \frac{e^{\sqrt{a^2+T^2}\cos\theta}}{(\sqrt{a^2+T^2})^{c-1}}.$$

Além disso decompomos o integral em integrais nos intervalos $[\alpha, \pi/2]$, $[\pi/2, 3\pi/2]$ e $[3\pi/2, 2\pi-\alpha]$. A análise do limite quando se integra entre $\pi/2$ e $3\pi/2$ será deixada para exercício e o que se passa em $[3\pi/2, 2\pi-\alpha]$ é análogo ao que se passa em $[\alpha, \pi/2]$. Assim limitamo-nos a estimar

$$\int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{e^{\sqrt{a^2+T^2}\cos\theta}}{\sqrt{a^2+T^2}^{c-1}}\,d\theta \le \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) e^{\sqrt{a^2+T^2}\cos\alpha}\left(\sqrt{a^2+T^2}\right)^{1-c} = \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) e^{a}\left(\sqrt{a^2+T^2}\right)^{1-c}.$$

Como $\operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)=\frac{a}{\sqrt{a^2+T^2}}$ *e usando o facto de* $\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}=1$ *podemos ainda obter, para um* $C>0$ *conveniente,*

$$\int_\alpha^{\pi/2}\frac{e^{\sqrt{a^2+T^2}\cos\theta}}{\sqrt{a^2+T^2}^{c-1}}\,d\theta\leq\frac{Cae^a}{(\sqrt{a^2+T^2})^c}\to 0\qquad \text{quando } T\to+\infty.$$

Exercício 2.7.2 *Complete o exemplo anterior.*

2.8 Séries de Laurent

Esta secção apresenta extensões de alguns resultados já obtidos, nomeadamente do teorema dos resíduos. A observação essencial é a possibilidade de usar "séries de potências" para representar funções holomorfas em coroas circulares $\{z\in\mathbb{C}: 0\leq r<|z-a|<R\}$. Note que tal inclui tais representações numa vizinhança de uma singularidade essencial e que as aspas em torno de "série de potências" estão lá para realçar o carácter diferente dessas séries em que se admitem potências inteiras quaisquer o que obriga a considerar dois processos de passagem ao limite.

Definição 2.8.1 *O símbolo*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k \tag{2.18}$$

em que $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão complexa designa*[13] *a soma de séries*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}c_{-k}+\sum_{k=0}^{+\infty}c_k. \tag{2.19}$$

A série dupla *em (2.18) dir-se-á convergente se* ambas *as séries em (2.19) o forem e divergente caso contrário.*

O resultado básico garantindo a existência das representações em que estamos interessados obtém-se adaptando a demonstração do lema 2.4.6.

Proposição 2.8.1 (Existência da série de Laurent)
Sejam $0\leq r<R$, $a\in\mathbb{C}$ *e* f *uma função holomorfa na coroa circular* $C_{r,R}\equiv\{z\in\mathbb{C}: r<|z-a|<R\}$. *Então para todo o* $z\in C_{r,R}$ vale

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(z-a)^k,\qquad \text{com } c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_s(a)}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw \text{ em que } r<s<R.$$

O integral na expressão de c_k *é calculado percorrendo a fronteira da bola* $B_s(a)$ *uma vez no sentido directo, isto é, usando, por exemplo,* $z(t)=a+se^{it}$, $t\in[-\pi,\pi]$.

Ideia da demonstração. Seja então $z\in C_{r,R}$. Se considerarmos o caminho sugerido[14] na figura 2.5 e aplicarmos o teorema dos resíduos ou a fórmula integral de Cauchy obtemos, para $r<s<|z-a|<S<R$,

$$2\pi i f(z)=\oint_{C_S}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\oint_{C_s}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

supondo na fórmula anterior que C_S e C_s são percorridos uma vez no sentido directo.

[13] Ao leitor que em primeira leitura duvidar da necessidade desta definição aconselha-se a reflectir no caso $c_k=1$ para $k\geq 0$ e $c_k=-1$ para $k<0$.

[14] Os dois segmentos de recta estão sobrepostos, cada uma das circunferências é percorrida uma vez, z está no interior da região limitada por aquelas linhas,...
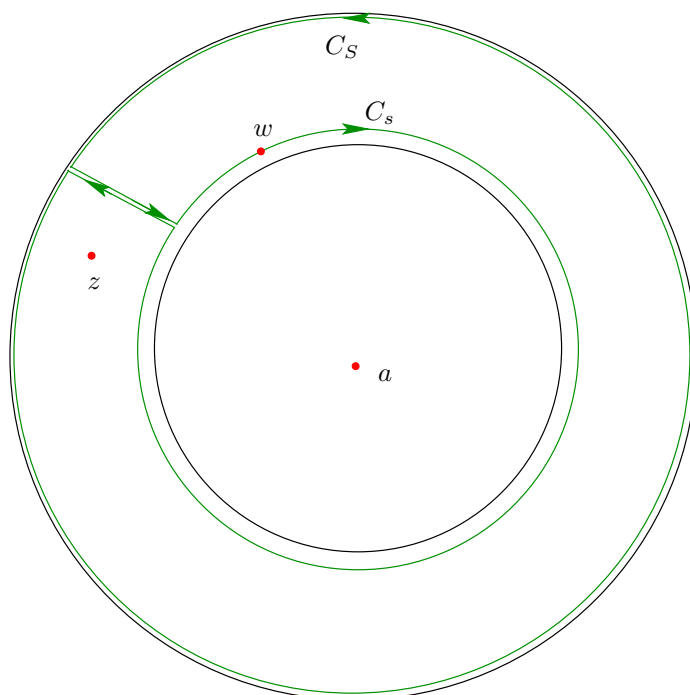
Figura 2.5: Os caminhos na demonstração da existência da série de Laurent.

Seguindo a demonstração do lema 2.4.6 usamos (2.11) no integral relativo a C_S e a identidade similar

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-a)-(w-a)} = -\frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = -\frac{1}{w-a}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k,$$

válida para $|w-a| < |z-a|$ no integral relativo a C_s, para obter

$$2\pi i f(z) = \oint_{C_S} f(w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w-a)^k}{(z-a)^{k+1}}\,dw + \oint_{C_s} f(w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}}\,dw.$$

Para completar a demonstração tudo o que é necessário é justificar a permuta dos integrais com as séries usando o teorema da convergência dominada para séries e justificar que na fórmula que assim se obtem a integração sobre C_S pode transformar-se numa integração sobre C_s via teorema de Cauchy. ■

Um corolário da existência da série de Laurent é uma versão mais geral do

Teorema 2.8.2 (Teorema dos resíduos)
Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa com A um conjunto de singularidades isoladas, L uma linha fechada seccionalmente C^1 em $\Omega \setminus A$ limitando uma região contida[15] em Ω e designemos por A_L o conjunto das singularidades isoladas de f na região limitada por L. Suponha-se que, para uma singularidade isolada $a \in A_L$ de f, L é homotópica em $\Omega \setminus \{a\}$ a uma circunferência C descrita por $z(t) = a + \rho e^{it}$ em que $\rho < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$. Então

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in A_L} \operatorname{Res}_f(a).$$

[15] Algo que será automaticamente satisfeito se Ω fôr simplesmente conexo.

Exercício 2.8.1 *Demonstre a versão anterior do teorema dos resíduos.*

É de notar, tal como para a série de Taylor, que a manipulação algébrica de séries conhecidas em geral fornece um método mais eficaz de determinação de um desenvolvimento em série do que, por exemplo, o cálculo dos coeficientes via (2.19).

Exercício 2.8.2 *Determine os desenvolvimentos em série de Laurent de potências de z da função $z \mapsto \frac{1}{z(z+1)(z+2i)}$ válidos nas regiões definidas por $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$ e $|z| > 2$.*

Exercício 2.8.3 *Determine o desenvolvimento em série de Laurent relativo a 0 de $z \mapsto z^2 e^{1/z^3}$. Aproveite para calcular $\int_C z^2 e^{1/z^3}\, dz$ em que C é definida pelo caminho $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.*

Exercício 2.8.4 *Decida se existe ou não uma função holomorfa $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ com uma singularidade essencial em 0 e tal que*

$$\oint_\gamma z^j h(z)\, dz = \begin{cases} 0, & \text{se } j < -1, \\ \frac{2\pi i}{(j+1)!} & \text{se } j \geq -1. \end{cases}$$

em que $j \in \mathbb{Z}$ e γ é uma qualquer circunferência centrada em 0 percorrida "uma vez no sentido directo".

2.9 Exercícios suplementares

Exercício 2.9.1 *Considere a função complexa de variável complexa definida por*

$$f(z) = \frac{e^z}{1 + e^{2z}}.$$

a) *Determine e classifique as singularidades de f.*

b) *Sendo Γ a curva de Jordan formada pela concatenação do segmento de recta orientado T que une -2 a 2 com a semi-circunferência C de centro 0, raio 2, unindo 2 a -2 no semiplano definido por $\operatorname{Im}(z) > 0$, calcule os integrais*

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz, \qquad \int_C f(z)\, dz.$$

Exercício 2.9.2 *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável da forma*

$$f(z) \equiv f(x + iy) = x + x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2 + iv(x, y)$$

com x, y e v reais.

a) *Determine a função v de maneira a $f(0) = i$.*

b) *Calcule todos os possíveis valores para o integral*

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz$$

em que Γ é uma curva de Jordan seccionalmente regular tal que $1 \notin \Gamma$.

Exercício 2.9.3 *Calcule*

$$\oint_L \frac{e^{-z}}{(z-i)\operatorname{sen} z}\, dz$$

em que L é a linha representada parametricamente em $\mathbb{C}$ por $z(t) = 2\cos t + 1 + i2\operatorname{sen} t$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Exercício 2.9.4 *Considere a função complexa de variável complexa f definida por*

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4 + 1}.$$

Aplique o teorema dos resíduos a f numa família de linhas de Jordan em $\mathbb{C}$ conveniente para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1}\, dx$$

2.10 Sugestões para os exercícios

2.2.2

1. A parte real e a parte imaginária são funções C^1 no seu domínio. Além disso
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$$
e
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right) = \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

2. $\overline{f}$ não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

3. Se designarmos por u a parte real da função e v o coeficiente da parte imaginária temos $f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$.

4. Temos, para $x > 0$, $e^{f(z)} = \sqrt{x^2+y^2}(\cos(\operatorname{arctg}(y/x)) + i\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(y/x)) = x + iy$.

5. O contradomínio estará com certeza contido em $A \equiv \{(u+iv) : u \in \mathbb{R}, v \in\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\}$. Para ver que o contradomínio é A verifica-se que $f(e^{u+iv}) = u + iv$ com $u + iv \in A$.

◀

2.2.9 As equações de Cauchy-Riemann para uma tal função f reduzem-se ao sistema

$$\begin{cases} 2x\varphi'(x^2-y^2) = x\psi'(xy), \\ -2y\varphi'(x^2-y^2) = -y\psi'(xy). \end{cases}$$

Considerando pontos sobre a recta definida por $y = x$ as equações conduzem a $2\varphi'(0) = \psi'(x^2)$ se $x \neq 0$. Como x na igualdade anterior x é um qualquer número não nulo concluimos que a derivada de ψ tem que ser constante (e igual a $2\varphi'(0)$) quando o seu argumento é positivo. De forma análoga considerando $y = -x$ chega-se à conclusão que a derivada de ψ tem de ser constante quando o seu argumento é negativo. Uma tal função tem de ter derivada constante por toda a parte (caso contrário não é diferenciável na origem). O mesmo argumento usando as rectas $y = 0$ e $x = 0$ conduz à conclusão que a derivada de φ é constante.

Assim φ e ψ correspondem a produtos por números reais. Designemo-los por α e β respectivamente. As condições de Cauchy-Riemann reduzem-se agora a

$$\begin{cases} 2x\alpha = x\beta, \\ -2y\alpha = -y\beta. \end{cases}$$

pelo que devemos ter $\beta = 2\alpha$. Assim $f(z) = \alpha(x^2-y^2) + i2\alpha xy = \alpha z^2$ com $z = x + iy$. ◀

2.4.3 Designe-se o ponto onde não se verifica diferenciabilidade mas verifica-se continuidade por p.
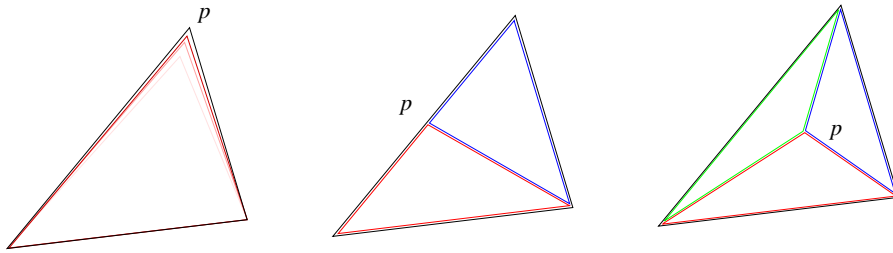
Figura 2.6: Esta figura acompanha a sugestão de solução do exercício 2.4.3.

No lema 2.4.3 nada se altera se p estiver no exterior do triângulo. Se p for um dos vértices "aproxime-se" o triângulo por outros em que os dois outros vértices são os mesmos e o terceiro é interior ao triângulo original e tende para p. Como a igualdade é válida para as aproximações a continuidade em p permite mostrar que também é válida para o triângulo original. Se p não for um vértice mas estiver sobre um dos lados usamos p para dividir T em dois triângulos e aplicamos o caso anterior para cada um destes. Se p for interior a T usamo-lo para dividir T em três triângulos e procedemos de forma idêntica.

No lema 2.4.4 nunca se usou directamente a holomorfia mas somente o facto dum integral ao longo de um caminho fechado ser 0 via lema 2.4.3 e a continuidade num ponto. ◀

2.7.1 As linhas C_ρ^+ e C_ρ^- estão esquematizadas na figura 2.7. Usando o teorema dos resíduos
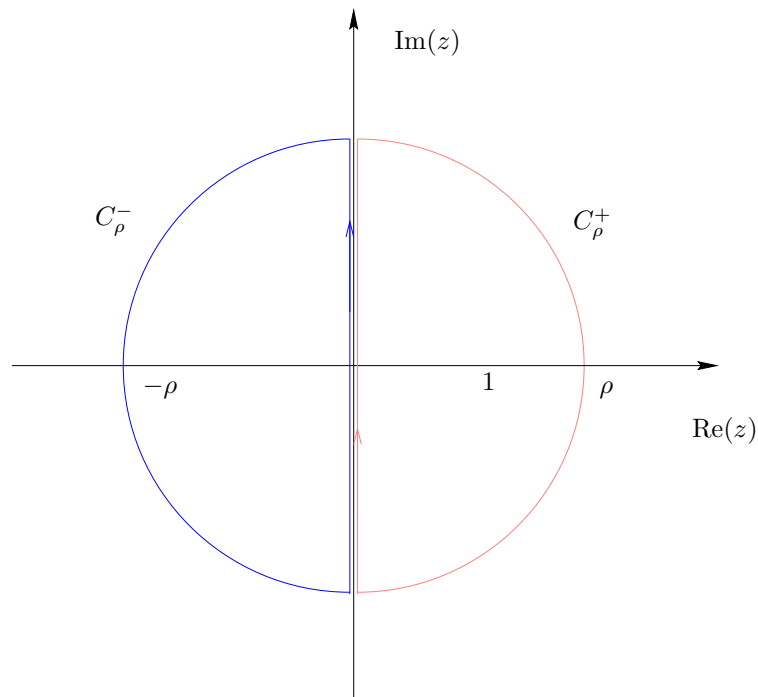
Figura 2.7: As linhas C_ρ^+ e C_ρ^-.

obtemos

$$\oint_{C_\rho^+} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\,dz = -2\pi i \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{(z+1)^2}\right)\right)\Bigg|_{z=1} = 0,$$

$$\oint_{C_\rho^-} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\,dz = 2\pi i \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{(z-1)^2}\right)\right)\Bigg|_{z=-1} = \pi i.$$

Como a exponencial é limitada no semiplano esquerdo ($|e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| \leq 1$ se $x \leq 0$) podemos usar o segundo (mas não o primeiro) destes integrais para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{(y^2+1)^2}\,dy = \lim_{\rho\to+\infty} \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{\cos y}{(y^2+1)^2}\,dy = \frac{1}{i}\lim_{\rho\to+\infty}\int_{L_\rho} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\,dz$$
$$= \frac{1}{i}\left(\pi i - \lim_{\rho\to+\infty}\int_{S_\rho} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\,dz\right) = \pi$$

em que S_ρ^- designa a semicircunferência e L_ρ^- o segmento de recta que formam C_ρ^-. O facto do limite quando $\rho \to +\infty$ do integral sobre S_ρ ser 0 decorre da função integranda ser majorável no semi-plano esquerdo[16] por $\frac{1}{\rho^2-1}$ e S_ρ ter comprimento $\pi\rho$. ◀

2.8.4 Admitindo que tal função existe o respectivo desenvolvimento em série de Laurent seria da forma

$$h(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k.$$

Admitindo temporariamente que podemos permutar a série com o integral teríamos

$$\oint_\gamma z^j h(z)\,dz = \oint_\gamma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^{j+k}\,dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \oint_\gamma c_k z^{j+k}\,dz = 2\pi i c_{-1-j}.$$

Daí que o candidato a função h deverá satisfazer

$$c_{-j-1} = \begin{cases} 0, & \text{se } j < -1 \\ \frac{1}{(j+1)!}, & \text{se } j \geq -1 \end{cases}$$

ou seja

$$h(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots = e^{1/z}.$$

Esta função de facto satisfaz todas as propriedades desejadas[17]. ◀

[16] O raciocínio análogo não pode ser efectuado com C_ρ^+ devido à exponencial não ser limitada no semiplano direito.

[17] *A priori* não poderíamos afirmar que a série de Laurent que obtemos formalmente fosse válida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Bibliografia

[1] L. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1978.

[2] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 2ª edição, 1978.

[3] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática.* Fundação Calouste Gulbenkian, 4ª edição, 1991.

[4] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* MacGraw Hill, New York, 1974.

Índice remissivo